iQ ЦЕНТР
ПОДГОТОВКА К ЭКЗАМЕНАМ

Р. Ш. Янборисова

МАТЕМАТИКА

Краткий справочник

Готовимся к ЕГЭ

Дорогой друг!

Подготовка к выпускным экзаменам невозможна без изучения теоретического материала. Однако составители наших учебных пособий тоже когда-то были школьниками, а потому прекрасно понимают, как пугают ребят большие объемы правил, изложенные не всегда понятным языком. Именно поэтому мы постарались максимально сжать необходимую информацию, сделать ее доступной и простой. Справочник по математике позволит в оптимальные сроки повторить изученный материал. Мы будем очень рады, если данное издание станет твоим верным помощником при подготовке к экзамену.

Желаем успехов! До новых встреч!

Коллектив преподавателей «iQ-центра»

АЛГЕБРА

ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ

2·1=2	3·1=3	4·1=4	5·1=5	6·1=6	7·1=7	8·1=8	9·1=9
2·2=4	3·2=6	4·2=8	5·2=10	6·2=12	7·2=14	8·2=16	9·2=18
2·3=6	3·3=9	4·3=12	5·3=15	6·3=18	7·3=21	8·3=24	9·3=27
2·4=8	3·4=12	4·4=16	5·4=20	6·4=24	7·4=28	8·4=32	9·4=36
2·5=10	3·5=15	4·5=20	5·5=25	6·5=30	7·5=35	8·5=40	9·5=45
2·6=12	3·6=18	4·6=24	5·6=30	6·6=36	7·6=42	8·6=48	9·6=54
2·7=14	3·7=21	4·7=28	5·7=35	6·7=42	7·7=49	8·7=56	9·7=63
2·8=16	3·8=24	4·8=32	5·8=40	6·8=48	7·8=56	8·8=64	9·8=72
2·9=18	3·9=27	4·9=36	5·9=45	6·9=54	7·9=63	8·9=72	9·9=81
2·10=20	3·10=30	4·10=40	5·10=50	6·10=60	7·10=70	8·10=80	9·10=90

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

		Единицы									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Десятки	**1**	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ПРАВИЛО ВОЗВЕДЕНИЯ В КВАДРАТ ЧИСЛА, ЗАКАНЧИВАЮЩИЕСЯ НА 5

Чтобы возвести в квадрат числа, заканчивающиеся на 5, нужно число, стоящее до последней пятерки, умножить на это же число плюс единица. К оставшемуся числу приписываем 25.

$15^2 = 225$, $1\cdot(1+1)$ и приписываем 25
$25^2 = 625$, $2\cdot(2+1)$ и приписываем 25
$85^2 = 7\,225$, $8\cdot(8+1)$ и приписываем 25
$155^2 = 24\,025$, $15\cdot(15+1)$ 25 = $(15\cdot16)$ и приписываем 25

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a^n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000
11	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881	2357947691	25937424601
12	12	144	1728	20736	248832	2985984	35831808	429981696	5159780352	61917364224

ФОРМУЛЫ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$ax^2 + bx + c = 0$, $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного уравнения

Если D>0, то уравнение имеет два различных корня: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Если D=0, то уравнение имеет один корень: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Если D<0, то уравнение не имеет действительных корней.

ТЕОРЕМА ВИЕТА ДЛЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Для общего уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Для приведенного уравнения

$$1x^2 + bx + c = 0 \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$$

ФОРМУЛА РАЗЛОЖЕНИЯ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – разность квадратов;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрат разности;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрат суммы;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ – разность кубов;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ – сумма кубов;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куб разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куб суммы;

$(a - b)^2 = (b - a)^2$ – квадрат разности.

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Существуют признаки делимости одного числа на другое. Эти признаки позволяют быстро выяснить, может ли одно натуральное число без остатка делиться на другое.

Признак делимости на	Формулировка	Пример
2	Число должно оканчиваться четной цифрой: **0 , 2 , 4 , 6 , 8**	125**8**
3	Сумма цифр числа должна делиться на **3**	745 , (7 + 4 + 5 = **15**)
4	Число, образованное двумя последними цифрами, должно делиться на **4**	79**24**
5	Число должно оканчиваться цифрой **0** или **5**	8**35**
6	Число должно делиться на **2** и на **3**	23**4** , (2 + 3 + 4 = **9**)
7	На **7** должно делиться число, полученное вычитанием удвоенной последней цифры из исходного числа с отброшенной последней цифрой	3626 , (362 – 12 = **350**)
8	Число, образованное тремя последними цифрами, должно делиться на **8**	63**024**

9	Сумма цифр должна делиться на **9**	2574, (2 + 5 + 7 + 4 = 18)
10	Число должно оканчиваться **0**	1690
11	Сумма цифр, стоящих на четных местах, либо равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от нее на число, делящееся на **11**	1408, (4 + 8 = 12; 1 + 0 = 1; 12 – 1 = 11)
13	На **13** должно делиться число, полученное добавлением учетверенной последней цифры к исходному числу с отброшенной последней цифрой	299, (29 + 36 = 65)
25	Число должно оканчиваться на **00**, **25**, **50** или **75**	7975
50	Число должно оканчиваться на **00** или **50**	2957450

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятностью события А называют отношение числа **m** благоприятствующих этому событию исходов к общему числу **n** всех равновозможных несовместимых событий, которые могут произойти в результате одного испытания или наблюдения: $P(A) = \frac{m}{n}$

(Пусть k – количество бросков монеты, тогда количество всевозможных исходов: $n=2^k$.

Пусть k – количество бросков кубика, тогда количество всевозможных исходов: $n=6^k$).

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема сложения вероятностей совместных событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$.

Частота отличается от вероятности только тем, что она берётся за конкретный период времени.

$$\text{Частота} = \frac{\text{благоприятные исходы}}{\text{все исходы}}$$

Исходы при бросании монетки

Исходы бросания монеты дважды *(всего 4 исх.)*:	Исходы бросания монеты трижды *(всего 8 исх.)*:	Исходы бросания монеты 4 раза *(всего 16 исх.)*:	Исходы бросания монеты 5 раз *(всего 32 исх.)*:
ОО	ООО РОР	ОООО РООР	ООООО ОРООО РОООО РРООО
ОР	ООР РОО	ОООР РООО	ООООР ОРООР РОООР РРООР
РО	ОРР РРО	ООРО РОРР	ОООРО ОРОРО РООРО РРОРО
РР	ОРО РРР	ООРР РОРО	ОООРР ОРОРР РООРР РРОРР
		ОРОО РРОР	ООРОО ОРРОО РОРОО РРРОО
		ОРОР РРОО	ООРОР ОРРОР РОРОР РРРОР
		ОРРО РРРО	ООРРО ОРРРО РОРРО РРРРО
		ОРРР РРРР	ООРРР ОРРРР РОРРР РРРРР

Исходы при бросании кубика

Исходы бросания кубика 1 раз *(всего 6 исх.)*:		Исходы бросания кубика дважды *(всего 36 исх.)*:						
	1		11	21	31	41	51	61
	2		12	22	32	42	52	62
	3		13	23	33	43	53	63
	4		14	24	34	44	54	64
	5		15	25	35	45	55	65
	6		16	26	36	46	56	66

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРОГРЕССИИ

Прогрессия	Арифметическая	Геометрическая
Формула n-го члена, $n \in N$	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Рекуррентная формула	$a_{n+1} = a_n + d$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$
Характеристическое свойство	$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} = a_n$	$b_{n+1} \cdot b_{n-1} = b_n^2,\ b_n \neq 0$
Формула суммы n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}$ $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$
Дополнительные формулы	$\frac{a_n - a_m}{n-m} = d,\ n \neq m$	$b_n : b_m = q^{n-m}$
Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $0<\lvert q\rvert<1$, $S = \frac{b_1}{1-q}$ – формула суммы		

СВОЙСТВА КОРНЯ

Пример: $\sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3, \sqrt{16}=4, \sqrt{25}=5$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
Пример:
$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
Пример:
$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}} = \sqrt{8}$

$(\sqrt{a})^2 = a$
Пример:
$\sqrt{3}^2 = 3$

$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$
Пример:
$\sqrt{(a-3)^2} = \lvert a-3 \rvert$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
Пример:
$\sqrt[5]{a^3} = a^{\frac{3}{5}}$

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

a^n – это степень, a – это основание, n – это показатель. *Пример:* $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
Пример:
$2^3 \cdot 2^5 = 2^8$

$a^n : a^m = a^{n-m}$
Пример:
$3^6 : 3^4 = 3^2$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
Пример:
$(4^3)^5 = 4^{15}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Пример:
$3^2 \cdot 4^2 = (12)^2$

$a^0 = 1$
Пример:
$5^0 = 1$

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Пример:
$\frac{8^3}{2^3} = 4^3$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
Пример:
$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
Пример:
$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^1$

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМА

$\log_b a$ – логарифм a по основанию b. $\log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c$. *Пример*: $\log_2 16 = x \Rightarrow x = 4$.

1. $a^{\log_a b} = b$
Пример:
$2^{\log_2 5} = 5$

2. $\log_b a^k = k \cdot \log_b a$
Пример:
$\log_4 2^3 = 3 \cdot \log_4 2$

3. $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \cdot \log_b a$
Пример:
$\log_{4^3} 2 = \frac{1}{3} \cdot \log_4 2$

4. $\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$
Пример:
$\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36$

5. $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$
Пример:
$\log_4 32 - \log_4 2 = \log_4 16$

6. $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
Пример:
$\log_2 5 = \frac{1}{\log_5 2}$

7. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
Пример:
$\log_5 25 = \frac{\log_3 25}{\log_3 5}$

8. $\log_b a \cdot \log_d c = \log_d a \cdot \log_b c$
Пример:
$\log_3 4 \cdot \log_2 9 = \log_2 4 \cdot \log_3 9$

МОДУЛЬ ЧИСЛА

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Свойство модуля

1. $|a - b| = |b - a|$

2. $\sqrt{a^2} = |a|$

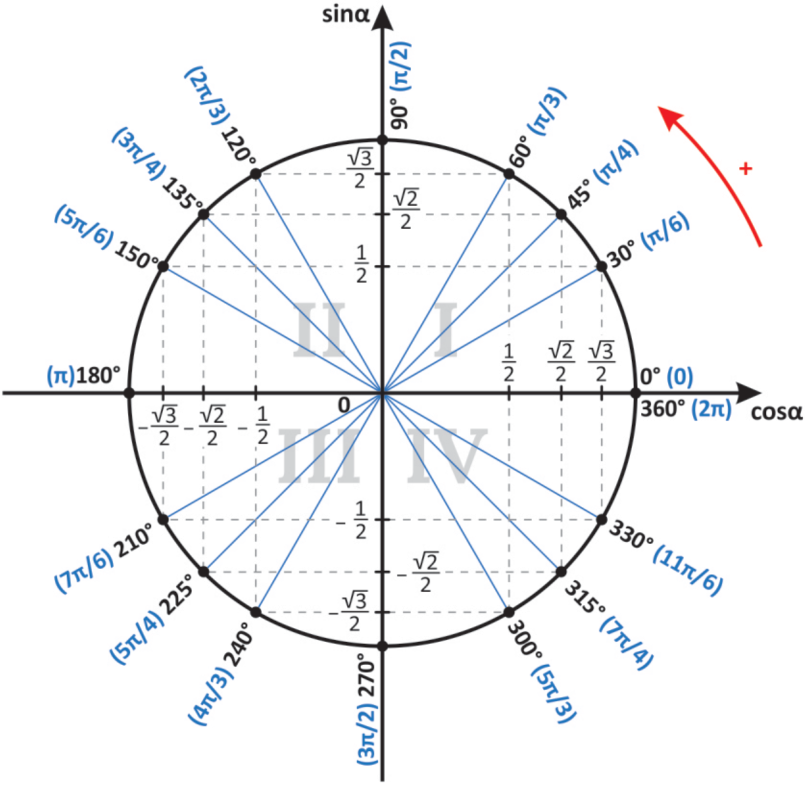
3. $(\sqrt{a})^2 = a,\ a \ge 0$

4. $|a|^2 = a^2$

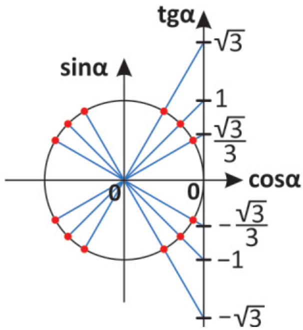
5. $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a,\ a \ge 0$

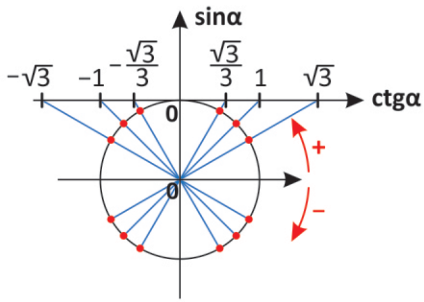
6. $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ или $x \le -a$

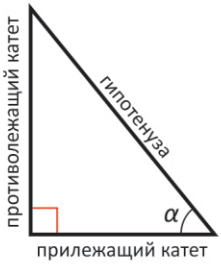
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КРУГ



ЗНАЧЕНИЯ ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА НА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ КРУГЕ







СИНУС

$$\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

КОСИНУС

$$\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

ТАНГЕНС

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

КОТАНГЕНС

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Основное тригонометрическое тождество	Связь между тангенсом и косинусом	Связь между котангенсом и синусом	Связь между тангенсом и котангенсом
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Определяем, изменится ли функция на кофункцию

Если в аргументе есть $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ или $\frac{5\pi}{2}$ и т. д., то функция меняется на кофункцию

Пример: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\mathrm{ctg}\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha$

Если в аргументе есть π или 2π, или 3π и т. д., то функция не меняется на кофункцию

Пример: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

Определяем знак

Чтобы определить знак, необходимо понять, в какой четверти находится аргумент и смотреть на изначальную функцию, а не на изменившуюся.

Пример: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

$\frac{3\pi}{2} + \alpha$ – это IV четверть, в ней синус имеет знак «–», поэтому: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$

Пример: $\mathrm{tg}(\pi + \alpha)$

$(\pi + \alpha)$ – это III четверть, в ней тангенс имеет знак «+», поэтому: $\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = +\,\mathrm{tg}\,\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \cos t$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp\sin t$	$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp\mathrm{ctg}\,t$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right) = \mp\mathrm{tg}\,t$
$\sin(\pi \pm t) = \mp\sin t$	$\cos(\pi \pm t) = -\cos t$	$\mathrm{tg}(\pi \pm t) = \pm\mathrm{tg}\,t$	$\mathrm{ctg}(\pi \pm t) = \pm\mathrm{ctg}\,t$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = -\cos t$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \pm\sin t$	$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp\mathrm{ctg}\,t$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm t\right) = \mp\mathrm{tg}\,t$
$\sin(2\pi \pm t) = \pm\sin t$	$\cos(2\pi \pm t) = \cos t$	$\mathrm{tg}(2\pi \pm t) = \pm\mathrm{tg}\,t$	$\mathrm{ctg}(2\pi \pm t) = \pm\mathrm{ctg}\,t$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА

Синус двойного угла	Косинус двойного угла	Косинус двойного угла (через косинус)	Косинус двойного угла (через синус)
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		a = 0	a = 1	a = −1
sin x = a	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ ***или*** $\left[\begin{array}{l} x_1 = \arcsin a + 2\pi n \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right.$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
cos x = a	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$ ***или*** $\left[\begin{array}{l} x_1 = \arccos a + 2\pi n \\ x_2 = -\arccos a + 2\pi n \end{array}\right.$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$
tg x = a	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$
ctg x = a	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$
где n ∊ Z (Z – множество целых чисел: ..., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4...)				

СВОЙСТВА ЧЕТНОСТИ И НЕЧЕТНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$\cos(-x) = \cos x$ – чётная
$\sin(-x) = -\sin x$ – нечётная
$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$ – нечётная
$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$ – нечётная

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
$\arcsin(-x) = -\arcsin x$
$\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}\, x$
$\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$\arcsin a = t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ \sin t = a,\ a \in [-1; 1]$

$\arcsin(\sin t) = t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin(\arcsin a) = a,\ a \in [-1; 1]$
$\arccos a = t,\ t \in [0; \pi],\ \cos t = a,\ a \in [-1; 1]$
$\arccos(\cos t) = t,\ t \in [0; \pi]$
$\cos(\arccos a) = a,\ a \in [-1; 1]$

$\mathrm{arctg}\, a = t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),\ \mathrm{tg}\, t = a,\ a \in R$

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, t) = t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, a) = a,\ a \in R$
$\mathrm{arcctg}\, a = t,\ t \in (0; \pi),\ \mathrm{ctg}\, t = a,\ a \in R$
$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, t) = t,\ t \in (0; \pi)$
$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, a) = a,\ a \in R$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$; $\quad \mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$; $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Производная элементарной функции		Производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u)\cdot u'(x)$	
$(c)' = 0$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$*	$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$
$(x)' = 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$	$(e^u)' = e^u\cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot u'$	$(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(a^x)' = a^x\ln a$	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$	* $u = u(x)$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$			

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. $(u+v)' = u' + v'$

2. $(Cu)' = C\cdot u'$

3. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

4. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

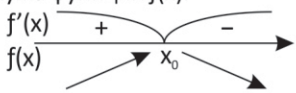
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ $f(x)$ В ТОЧКЕ С АБСЦИССОЙ x_0

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Физический смысл производной состоит в том, что производная от координаты по времени есть мгновенная скорость: $v(t) = s'(t)$

Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «−», то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.



Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «−» на «+», то x_0 – точка минимума функции $f(x)$.

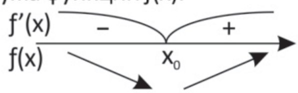


ГРАФИК ОБЫЧНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРОИЗВОДНОЙ

График обычной функции $y = x^3 - 3x$

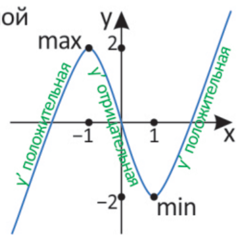
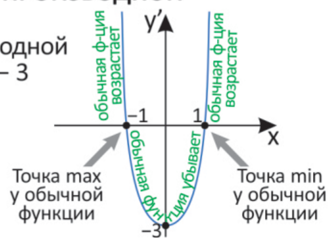


График производной $y' = 3x^2 - 3$



АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО ИЛИ НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ [a; b]

1. Найти область определения функции и вычислить значения функции (не производной!) в этих точках: f(a), f(b).
2. Найти производную функции и определить точки экстремума (те точки, в которых производная функции обращается в ноль, и точки, в которых не существует двухсторонней конечной производной).
3. Выбрать из точек экстремума, те, которые принадлежат данному отрезку **[a; b]** и области определения функции и найти значение функции от них.
4. Из всех найденных значений выбрать наибольшее или наименьшее, оно и будет искомым.

ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРАЛ

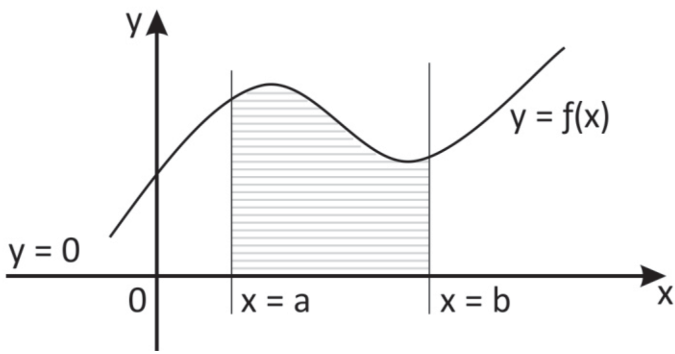
Функцию F(x) называют *первообразной* для функции f(x) на интервале (a; b), если на нем производная функции F(x) равна f(x): $F'(x) = f(x)$.
Операцию, обратную *дифференцированию* называют *интегрированием*.

Три правила нахождения первообразных

1. Если F(x) есть первообразная для f(x), а G(x) – первообразная для g(x), то F(x) + G(x) есть первообразная для f(x) + g(x).
2. Если F(x) есть первообразная для f(x), а k – постоянная, то функция kF(x) есть первообразная для kf(x).
3. Если F(x) есть первообразная для f(x), а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для f(kx + b).

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ – формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями: сверху ограниченной кривой y = f(x), и прямыми y = 0; x = a; x = b.



НЕРАВЕНСТВА

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств

Алгоритм действий во всех случаях одинаков.

1. Если неравенство содержит рациональные функции в обеих частях, то собираем все слагаемые в одной части (например, в левой).

2. Приводим все слагаемые к общему знаменателю. В левой части неравенства получаем дробь, знаменатель которой уже разложен на множители. В правой части стоит нуль.

3. Раскладываем числитель полученной дроби на множители. Тем самым неравенство приводится к виду, приспособленному для метода интервалов.

4. Отмечаем на числовой оси нули числителя и знаменателя. Нули знаменателя выколоты. Нули числителя выколоты, если неравенство строгое, и закрашены, если неравенство нестрогое.

5. Расставляем знаки на полученных интервалах. Если множитель $x - x_0$ стоит в нечётной степени, то при переходе через точку x_0 знак меняется. В случае чётной степени знак не меняется.

6. Если при переходе через закрашенную точку знак не меняется, то ставим в этой точке флажок.

7. Записываем ответ, не забывая про флажки. Если флажок оказался внутри промежутка решений, то он «поглощается» этим промежутком. Если флажок не находится внутри промежутка решений, он даёт изолированную точку-решение.

Метод сведения неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств

1. $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

3. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

4. $\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \iff \begin{cases} f(x) \leq g^{2n}(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

5. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$

6. $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array} \right.$

7. $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \iff f(x) \vee g(x)$

8. $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \iff f(x) \vee g^{2n+1}(x)$

где символ v заменяет один из символов: >, <, ≥, ≤.

Некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств

1. $(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

2. $(\varphi(x))^{f(x)} \ge (\varphi(x))^{g(x)} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \\ \varphi(x) = 1 \end{array}\right.$

В частности:
Если число $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$
Если число $0 > a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$

Некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств

1. $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

В частности:
Если число $a > 1$, то
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff f(x) > g(x) > 0$
Если число $0 < a < 1$, то
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff g(x) > f(x) > 0$

2. $\log_{\varphi(x)} f(x) \ge \log_{\varphi(x)} g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

В частности:
Если число $a > 1$, то
$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \iff f(x) \ge g(x) > 0$
Если число $0 < a < 1$, то
$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \iff g(x) \ge f(x) > 0$

Некоторые стандартные схемы для решения неравенств, содержащих знак модуля

1. $|f(x)| < g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

3. $|f(x)| > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$

2. $|f(x)| \le g(x) \iff \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x) \end{cases}$

4. $|f(x)| \ge g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right.$

5. $|f(x)| > g(x) \iff f^2(x) > g^2(x) \iff (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) > 0$
6. $|f(x)| \ge g(x) \iff f^2(x) \ge g^2(x) \iff (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \ge 0$

Метод расщепления неравенств

1. $f(x) \cdot g(x) \ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$

3. $f(x) \cdot g(x) \le 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \le 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right.$

2. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

4. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \le 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Метод рационализации (метод декомпозиции, метод замены множителей, метод замены функции, правило знаков)

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения F(x) на более простое выражение G(x), при которой неравенство G(x) v 0 равносильно неравенству F (x) v 0 в области определения выражения F (x).

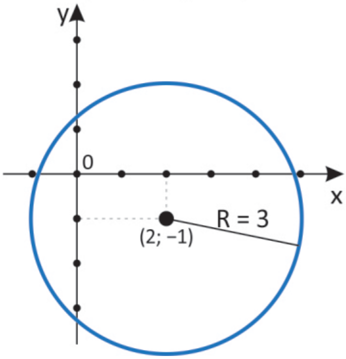
Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f , g, h, p, q – выражения с переменной x ($h > 0$; $h \neq 1$; $f > 0$; $g > 0$) , a – фиксированное число ($a > 0$; $a \neq 1$).

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a - 1)(f - g)$
2	$\log_a f - 1$	$(a - 1)(f - a)$
3	$\log_a f$	$(a - 1)(f - 1)$
4	$\log_h f - \log_h g$	$(h - 1)(f - g)$
5	$\log_h f - 1$	$(h - 1)(f - h)$
6	$\log_h f$	$(h - 1)(f - 1)$
7	$\log_f h - \log_g h$ ($g \neq 1$, $f \neq 1$)	$(f - 1)(g - 1) \cdot (h - 1)(g - f)$
8	$\log_h f \cdot \log_p q$	$(h - 1)(f - 1)(p - 1)(q - 1)$
9	$\log_h f + \log_h g$	$(f g - 1)(h - 1)$
10	$h^f - h^g$ ($h > 0$)	$(h - 1)(f - g)$
11	$h^f - 1$	$(h - 1) f$
12	$f^h - g^h$ ($f > 0$; $g > 0$)	$(f - g) \cdot h$
13	$\dfrac{h^f - h^g}{h^p - h^q}$	$\dfrac{f - g}{p - q}$
14	$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$f - g$
15	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f - g)(f + g)$

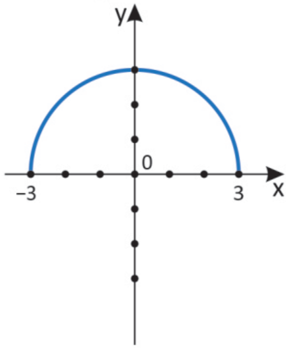
ПРИМЕРЫ ГРАФИКОВ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

График уравнения с двумя переменными – это множество всех точек плоскости, координаты которых *x, y* являются решениями уравнения.

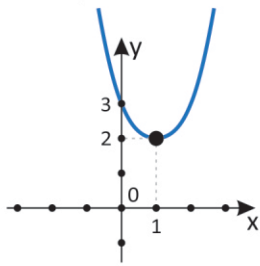
1. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$



2. $y = \sqrt{3^2 - x^2}$



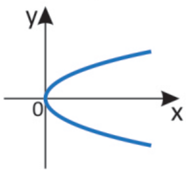
3. $y = x^2 - 2x + 3$



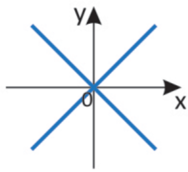
$$x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_B = y(x_B) = 2$$

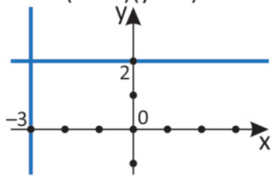
4. $y^2 = x$



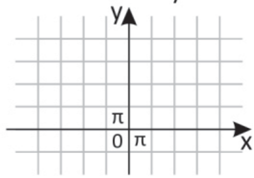
5. $y^2 = x^2$



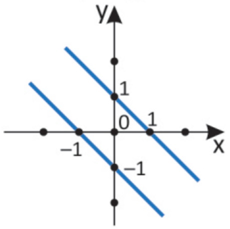
6. $(x + 3)(y - 2) = 0$



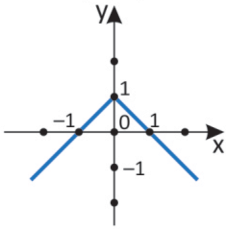
7. $\sin x \cdot \sin y = 0$



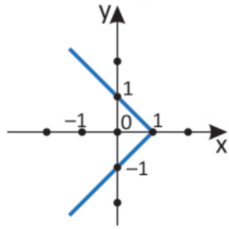
8. $|x + y| = 1$



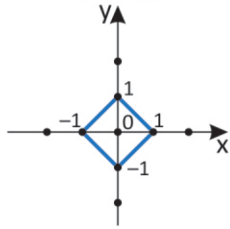
9. $|x| + y = 1$



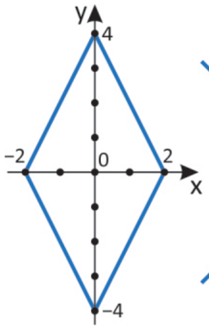
10. $x + |y| = 1$



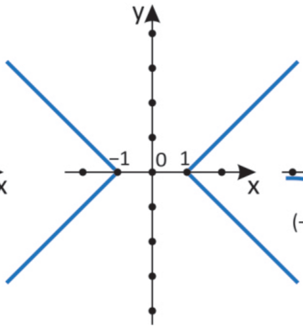
11. $|x| + |y| = 1$



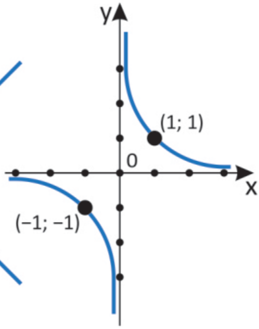
12. $4|x| + 2|y| = 8$



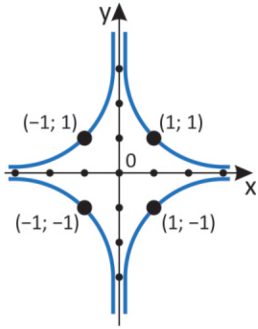
13. $|x| - |y| = 1$



14. $x \cdot y = 1$



15. $|x| \cdot |y| = 1$



МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Для векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ имеют место действия:

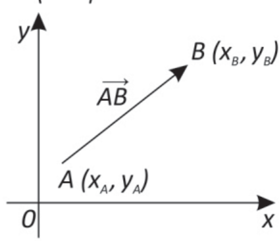
1. сложение $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}$;

2. вычитание $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2\}$;

3. умножение на число $k \cdot \vec{a} = \{kx_1;\ ky_1\}$.

Скалярное произведение векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$.

$$\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$



Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Пусть заданы точки A (x_A, y_A) и B (x_B, y_B), тогда

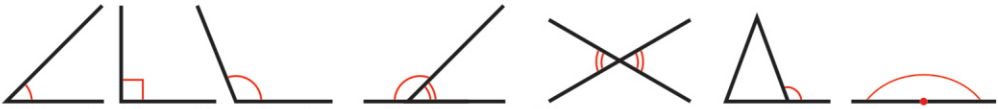
Координаты вектора: $\overrightarrow{AB}\ \{x_B - x_A;\ y_B - y_A\}$.

Координаты середины отрезка *AB*: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

Расстояние между точками *A и B* (длина вектора $\overrightarrow{AB}$): $AB = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

ГЕОМЕТРИЯ В КАРТИНКАХ

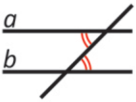
УГЛЫ



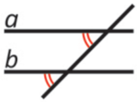
Острый *меньше 90°* | Прямой *равен 90°* | Тупой *больше 90°* | Смежные *в сумме образуют угол 180°* | Вертикальные *вертикальные углы равны* | Внешний | Развёрнутый *равен 180°*

Признаки параллельности прямых

1. Внутренние накрест лежащие углы равны



2. Соответственные углы равны

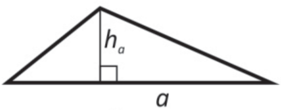


3. Внутренние односторонние углы составляют в сумме 180°

Сумма углов многоугольников

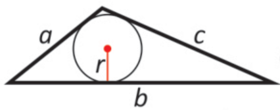
Сумма углов треугольника = 180°
Сумма углов четырёхугольника = 360°
Сумма углов пятиугольника = 540°
Сумма углов шестиугольника = 720°

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \alpha$$



$$S = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}$$

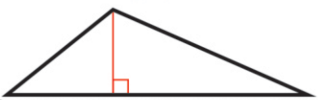
Прочие соотношения

$$r = \frac{2 \cdot S}{a+b+c}$$

Биссектриса

Биссектриса – это луч, с началом в вершине угла, делящий угол на два равных угла

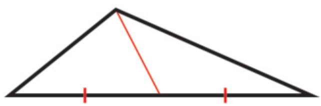
Высота треугольника



Высота в остроугольном треугольнике

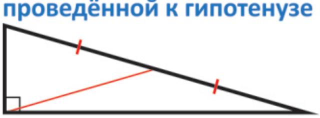
Высота треугольника – это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону

Медиана



Медиана – это луч, с началом в вершине угла, делящий противоположную сторону пополам

Теорема о медиане, проведённой к гипотенузе

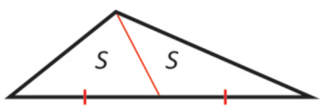


Медиана, проведённая к гипотенузе равна половине гипотенузы

Теорема синусов

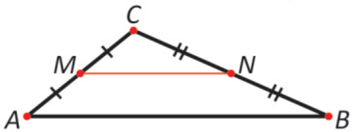
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

Свойство медианы



Медиана разбивает треугольник на два равновеликих (на два треугольника с равными площадями)

Средняя линия треугольника



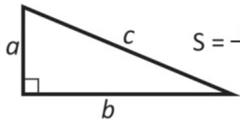
1. $MN \parallel AB$
2. $MN = \frac{1}{2} \cdot AB$

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Признаки равенства треугольников

1. По двум сторонам и углу между ними.
2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.
3. По трём сторонам.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

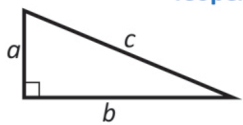


$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

Прочие соотношения

$$r = \frac{a \cdot b}{a+b+c} \qquad R = \frac{c}{2}$$

Теорема Пифагора



Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Синус

$$\sin\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

Косинус

$$\cos\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

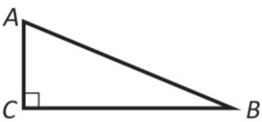
Тангенс

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Котангенс

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Свойство острых углов



В прямоугольном треугольнике, синус одного острого угла равен косинусу другого острого угла

$\sin A = \cos B$

$\cos A = \sin B$

Аналогично тангенс одного острого угла равен котангенсу другого острого угла

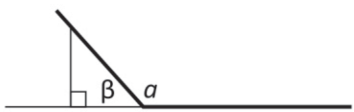
$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$

$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B$

Теорема о катете, лежащем против 30°

Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.

Свойство смежных углов

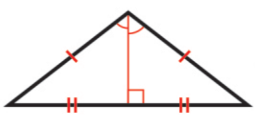


$\sin\alpha = \sin\beta$
$\cos\alpha = -\cos\beta$
$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$
$\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{ctg}\beta$

Чтобы найти sin или cos, tg или ctg, нужно найти соответствующую функцию для смежного угла.

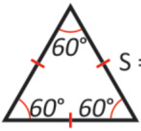
РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Теорема о медиане, биссектрисе, высоте



В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию является ещё и медианой, и биссектрисой

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



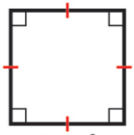
$$S = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

Прочие соотношения

$$R = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3} \qquad h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

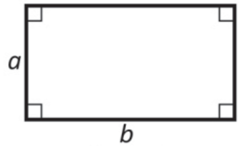
$$r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6} \qquad h = 1{,}5 \cdot R \qquad h = 3 \cdot r$$

КВАДРАТ



$S = a^2$

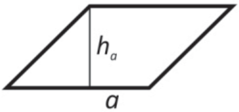
ПРЯМОУГОЛЬНИК



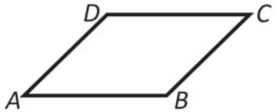
$S = a \cdot b$

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

$S = a \cdot h_a$



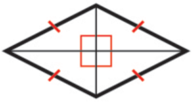
Теорема о сумме углов у любой стороны

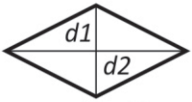


В параллелограмме сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180°.

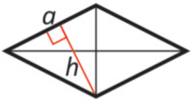
$\angle A + \angle B = 180°$
$\angle B + \angle C = 180°$
$\angle C + \angle D = 180°$
$\angle D + \angle A = 180°$

РОМБ

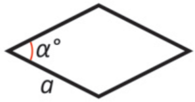




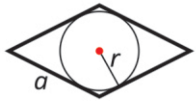
$$S = \frac{d1 \cdot d2}{2}$$



$S = a \cdot h$

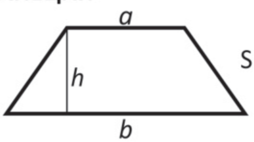


$S = a^2 \cdot \sin\alpha$



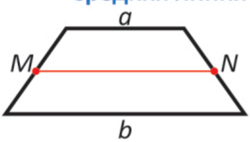
$S = 2 \cdot a \cdot r$

ТРАПЕЦИЯ



$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Средняя линия трапеции

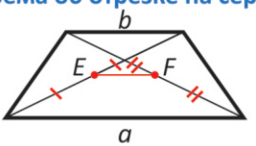


1. $MN \parallel a \parallel b$

2. $MN = \frac{a + b}{2}$

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

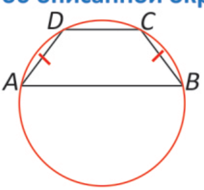
Теорема об отрезке на серединах диагоналей



$$EF = \frac{a - b}{2}$$

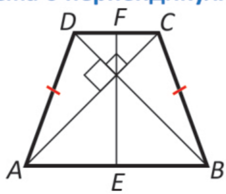
Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен полуразности оснований.

Теорема об описанной окружности



Если трапецию можно вписать в окружность, то эта трапеция – равнобедренная.

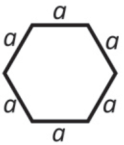
Теорема о перпендикулярных диагоналях



$$h = \frac{a + b}{2}$$

Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.

ШЕСТИУГОЛЬНИК

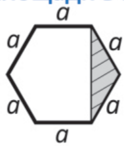


$$S = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}$$

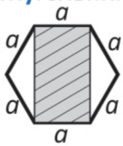
Прочие соотношения

$R = a$; $r = \dfrac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$

Площади в шестиугольнике



$$S_{ТР} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$



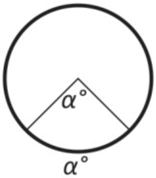
$$S_{ПР} = \sqrt{3} \cdot a^2$$

Диагонали в шестиугольнике

ОКРУЖНОСТЬ

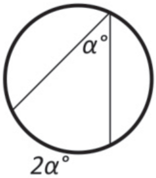
Длина окружности $C = 2 \cdot \pi \cdot R$ **Площадь круга** $S = \pi \cdot R^2$

Центральный угол



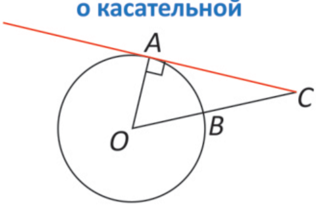
Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

Вписанный угол



Вписанный угол равен половине градусной мере дуги, на которую он опирается.

Теорема о касательной



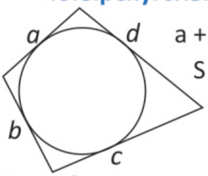
Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Теорема о вписанном четырёхугольнике

$\alpha + \beta = 180°$

В любом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Теорема об описанном четырёхугольнике



$a + c = b + d$

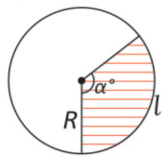
$S = p \cdot r$, где p – полупериметр

В любом описанном окружностью четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Теорема об отрезках касательных

Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

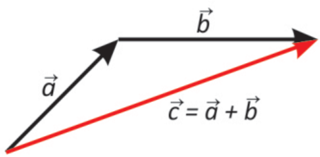
Круговой сектор



$$S_{СЕКТОРА} = \frac{l_{СЕКТОРА} \cdot R}{2}$$

$$l_{СЕКТОРА} = \frac{2 \cdot S_{СЕКТОРА}}{R}$$

ВЕКТОРЫ

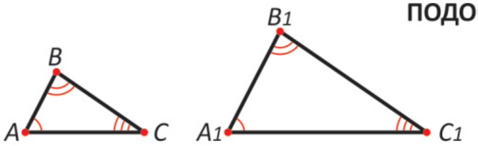


$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Сложение векторов

Даны два вектора. К концу первого пристраиваем начало второго. Теперь соединяем начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ПОДОБИЕ



$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

Признаки подобия треугольников

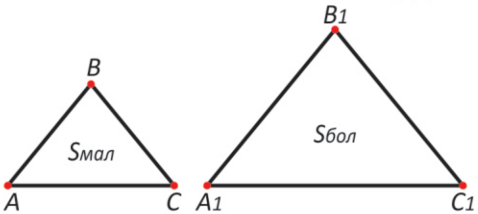
1. По двум равным углам.
2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
3. По трём пропорциональным сторонам.

Отношения в подобных треугольниках

Отношение периметров, биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров равно коэффициенту подобия.

(периметры) $\frac{P_{бол}}{P_{мал}} = k$ | (медианы) $\frac{m_{бол}}{m_{мал}} = k$ | (биссектрисы) $\frac{l_{бол}}{l_{мал}} = k$ | (высоты) $\frac{h_{бол}}{h_{мал}} = k$ | (сер. перпендикуляр) $\frac{h_{сер.бол}}{h_{сер.мал}} = k$

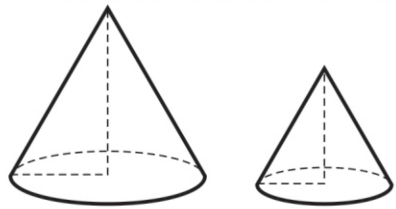
ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ



$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = k^2$$

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ОБЪЁМОВ



$$\frac{V_{бол}}{V_{мал}} = k^3$$

Отношение объёмов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия.

ПЛАНИМЕТРИЯ В ФОРМУЛАХ

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Треугольники

Произвольный

(a, b, c – стороны, h_a – высота, опущенная на сторону a, p – полупериметр, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности)

Периметр $P = a + b + c$ | $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр

Площадь $S = \frac{1}{2}\cdot ah_a = \frac{1}{2}\cdot bh_b = \frac{1}{2}\cdot ch_c$ | $S = \frac{1}{2}\cdot ab\sin C$ | $S = \sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$ | $S = \frac{abc}{4R}$

Высота $h_a = b\sin C$ | $h_a = \frac{2S}{a}$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \frac{2S}{a+b+c}$ | $r = \frac{S}{p}$

Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S}$ | $R = \frac{a}{2\sin A}$ | $R = \frac{b}{2\sin B}$ | $R = \frac{c}{2\sin C}$

Дополнительные формулы

$MN = \frac{1}{2}a$ – средняя линия, параллельная стороне a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ – теорема косинусов

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ – теорема синусов

Правильный (равносторонний)

Периметр $P = 3a$

Площадь $S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Высота $h = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{6}$

Радиус описанной окружности $R = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$

Дополнительные формулы $R = 2r = \frac{2}{3}h$

Равнобедренный (a – основание, b – боковая сторона)

Периметр $P = a + 2b$

Высота $h_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$

Площадь $S = \frac{1}{4}a\sqrt{4b^2 - a^2}$

Дополнительные формулы $h_b = a \sin B = a \sin C$

Прямоугольный
(a, b – катеты, c – гипотенуза, hc – высота, проведенная к гипотенузе, ac, bc – проекции катетов на гипотенузу)

Периметр $P = a + b + c$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{a + b - c}{2}$

Площадь $S = \frac{1}{2}ab$ | $S = \frac{1}{2}ch_c$

Радиус описанной окружности $R = \frac{c}{2}$

Высота $h_c = \frac{ab}{c}$ | $h_c = \sqrt{a_c \cdot b_c}$

Дополнительные формулы $a^2 + b^2 = c^2$ – теорема Пифагора | $a = \sqrt{a_c \cdot c}$ | $b = \sqrt{b_c \cdot c}$

Четырёхугольники

Ромб
(a – сторона, h – высота, r – радиус вписанной окружности, α – острый угол ромба, d_1, d_2 – диагонали)

Периметр $P = 4a$

Площадь $S = a^2 \cdot \sin A$ | $S = a \cdot h$ | $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$

Высота $h = a \cdot \sin A$ | $h = 2 \cdot r$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{h}{2}$ | $r = \frac{1}{2}a \cdot \sin\alpha$

Дополнительные формулы $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$ | $d_1 = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$ | $d_2 = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$

Трапеция
(a, b – основания, c, d – боковыестороны, h – высота, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями, MN – средняя линия)

Периметр $P = a + b + c + d$

Высота $h = c \cdot \sin A$

Площадь $S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$ | $S = MN \cdot h$ | $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Радиус вписанной окружности
В трапецию можно вписать окружность если $a + b = c + d$, тогда $r = \frac{h}{2}$

Радиус описанной окружности
Около р/б трапеции можно описать окружность.

Дополнительные формулы $MN = \frac{a + b}{2}$

Квадрат (правильный четырехугольник)

(a – сторона, d – диагональ)

Периметр $P = 4 \cdot a$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{a}{2}$

Площадь $S = a^2$ | $S = \frac{1}{2} \cdot d^2$

Радиус описанной окружности $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$ | $R = \frac{d}{2}$

Дополнительные формулы $d = a\sqrt{2}$

Прямоугольник

(a, b – стороны, d – диагональ, φ – угол между диагоналями)

Периметр $P = 2 \cdot (a + b)$

Радиус описанной окружности $R = \frac{d}{2}$ | $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

Площадь $S = a \cdot b$ | $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$

Дополнительные формулы $a^2 + b^2 = d^2$

Параллелограмм

(a, b – стороны, h_a, h_b – высоты, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями)

Периметр $P = 2 \cdot (a + b)$

Площадь $S = a \cdot b \sin A$ | $S = ah_a = bh_b$ | $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi$

Высота $h_a = b \cdot \sin A$ | $h_b = a \cdot \sin C$ | $h_a = \frac{S}{a}$ | $h_b = \frac{S}{b}$

Доп. формулы $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$

Шестиугольник правильный

(a – сторона, $d_{большая}$, $d_{меньшая}$ – диагонали)

Периметр $P = 6 \cdot a$

Радиус вписанной окружности $r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$

Площадь $S = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Радиус описанной окружности $R = a$

Дополнительные формулы $d_{бол} = 2a$ | $d_{мал} = a\sqrt{3}$

ОКРУЖНОСТЬ и КРУГ

Окружность, круг

(R – радиус, d – диаметр, α – центральный угол, AB, CD – хорды, AB ∩ CD = M)

Длина окружности $C = 2\pi R$ | $C = \pi d$

Площадь круга $S = \pi R^2$ | $S = \frac{\pi d^2}{4}$

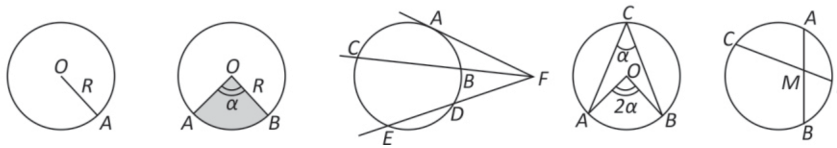
Длина дуги окружности $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$

Площадь кругового сектора $S_{кр.сек.} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$

Касательная и секущие $FB \cdot FC = FD \cdot FE$ | $FA^2 = FB \cdot FC = FD \cdot FE$

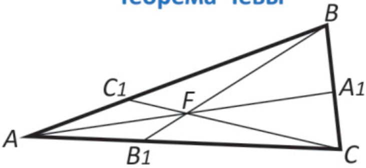
Вписанный и центральный углы $\angle AOB = 2\angle ACB$ | $\angle ACB = 90°$, если AOB – диаметр

Дополнительные формулы $d = 2R$ | $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКЕ

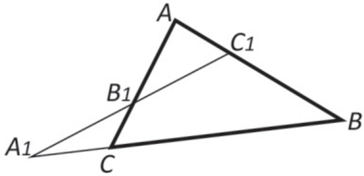
Теорема Чевы



Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда:

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$

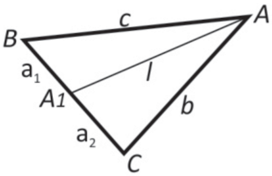
Теорема Менелая



Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда:

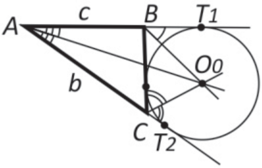
$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}=1$$

Теорема Стюарта



$AA_1 = l$, тогда $l^2=\dfrac{b^2\cdot a_1+c^2\cdot a_2}{a_1+a_2}-a_1\cdot a_2$

Центры вневписанных окружностей



$$AT_1 = AT_2 = \frac{1}{2}(AB+BC+CA) = p$$

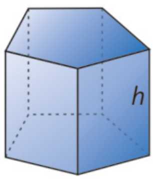
$$BK = p - c;\ CK = p - b$$

Центры вневписанных окружностей лежат в точках пересечения биссектрисы внутреннего и двух биссектрис внешних углов треугольника.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

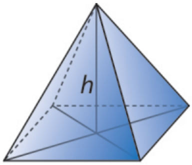
МНОГОГРАННИКИ

Обозначения: a – сторона основания, h – высота многогранника, l – апофема (высота боковой грани пирамиды), $P\perp$ – периметр перпендикулярного сечения призмы, d – длина бокового ребра призмы, $S\perp$ – площадь перпендикулярного сечения призмы.



Призма

	Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
Произвольная призма	—	$S_{бок}=P\perp\cdot d$	$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$	$V=S_{осн}\cdot h$ $V=S\perp\cdot d$
Прямая призма	—	$S_{бок}=P_{осн}\cdot h$	$S_{полн}=P_{осн}\cdot h+2S_{осн}$	$V=S_{осн}\cdot h$
Правильная треугольная призма	$S_{осн}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$	$S_{бок}=3\cdot a\cdot h$	$S_{полн}=3\cdot a\cdot h+\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$V=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot h$
Правильная четырехугольная призма (прямоугольный параллелепипед)	$S_{осн}=a^2$	$S_{бок}=4\cdot a\cdot h$	$S_{полн}=4\cdot a\cdot h+2\cdot a^2$	$V=a^2\cdot h$
Правильная шестиугольная призма	$S_{осн}=\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$S_{бок}=6\cdot a\cdot h$	$S_{полн}=6\cdot a\cdot h+3\cdot a^2\sqrt{3}$	$V=\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot h$

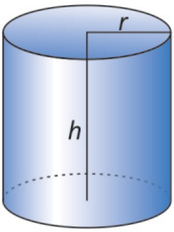


Пирамида

	Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
Произвольная пирамида	—	—	$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$
Правильная треугольная пирамида	$S_{осн}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$	$S_{бок}=\frac{3\cdot a\cdot l}{2}$	$S_{полн}=\frac{3\cdot a\cdot l}{2}+\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$V=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{12}\cdot h$
Правильная четырех-угольная пирамида	$S_{осн}=a^2$	$S_{бок}=2\cdot a\cdot l$	$S_{полн}=2\cdot a\cdot l+a^2$	$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot h$
Правильная шести-угольная пирамида	$S_{осн}=\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$S_{бок}=3\cdot a\cdot l$	$S_{полн}=3\cdot a\cdot l+\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$	$V=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot h$

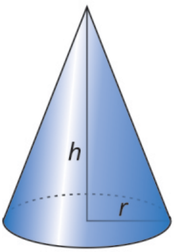
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Обозначения: r, R – радиусы оснований, h – высота, l – образующая



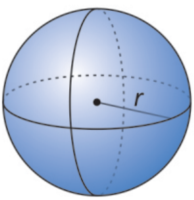
Цилиндр

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
$S_{осн}=\pi r^2$	$S_{бок}=2\pi rh$	$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$ $S_{полн}=2\pi rh+2\pi r^2$	$V=S_{осн}\cdot h$ $V=\pi r^2\cdot h$



Конус

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
$S_{осн}=\pi r^2$	$S_{бок}=\pi rl$	$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$ $S_{полн}=\pi rl+\pi r^2$	$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h$ $V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$
усечённый конус			
$S_{осн1}=\pi r^2$ $S_{осн2}=\pi R^2$	$S_{бок}=\pi\cdot(r+R)\cdot l$	$S_{полн}=\pi r^2+\pi R^2+\pi(r+R)l$	$V=\frac{1}{3}\pi(r^2+$ $+rR+R^2)\cdot h$



Шар

Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности	Объем
—	—	$S_{пов}=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\cdot\pi r^3$

ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ

№	a	b	c	S	P	h (c)
1	3	4	5	6	12	2,4
2	5	12	13	30	30	60/13
3	6	8	10	24	24	4,8
4	7	24	25	84	56	6,72
5	8	15	17	60	40	120/17
6	9	12	15	54	36	7,2
7	9	40	41	180	90	360/41
8	10	24	25	120	60	120/13
9	11	60	61	330	132	660/61
10	12	16	20	96	48	9,6
11	12	35	37	210	84	420/37
12	13	84	85	546	182	1092/85
13	14	48	50	336	112	13,44
14	15	20	25	150	60	12
15	15	36	39	270	90	180/13
16	16	30	34	240	80	240/17
17	16	63	65	504	144	1008/65
18	18	24	30	216	72	14,4
19	18	80	82	720	180	720/41
20	20	21	29	210	70	420/29
21	20	48	52	480	120	240/13
22	20	99	101	990	220	1980/101
23	21	28	35	294	84	16,8
24	21	72	75	756	168	20,16
25	22	120	122	1320	264	1320/61
26	24	32	40	384	96	19,2
27	24	45	51	540	120	360/17
28	24	70	74	840	168	840/37
29	25	60	65	750	150	300/13
30	27	36	45	486	108	21,6
31	27	120	123	1620	270	1080/41
32	28	45	53	630	126	1260/53
33	28	96	100	1344	224	26,88
34	30	40	50	600	120	24
35	30	72	78	1080	180	360/13
36	32	60	68	960	160	480/17
37	32	126	130	2016	288	2016/65
38	33	44	55	726	132	26,4
39	33	56	65	924	154	1848/65
40	35	84	91	1470	210	420/13
41	36	48	60	864	144	28,8
42	36	77	85	1386	198	2772/85
43	36	105	111	1890	252	1260/37
44	39	52	65	1014	156	31,2

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ В МАТЕМАТИКЕ

$=$	– равенство (равно)
$\neq$	– не равно
$\approx$	– приблизительно равно
$a \vdots b$	– a делится без остатка на b
$a \mid b$	– a делит b (b делится на a)
$\forall$	– квантор всеобщности (для любого, для любых)
$\exists$	– квантор существования (существует)
$\nexists$	– квантор отрицания существования (не существует)
$!$	– единственность
$\cup$	– объединение
$\cap$	– пересечение
$\subset$	– подмножество
$\in$	– принадлежит
$\notin$	– не принадлежит
$=>$	– следование (следует)
$<=>$	– равносильность равносильно
$\varnothing$	– пустое множество
N	– множество натуральных чисел
Z	– множество целых чисел
Q	– множество рациональных чисел
R	– множество действительных чисел
C	– множество комплексных чисел
$<$	– сравнение «меньше, чем»
$>$	– сравнение «больше, чем»
$\leq$	– сравнение «меньше или равно, чем»
$\geq$	– сравнение «больше или равно, чем»
∞	– бесконечность
$\sum$	– сумма
$\prod$	– произведение
$[a; b]$	– отрезок числовой прямой (концы ему принадлежат)
$(a; b)$	– интервал числовой прямой концы ему не принадлежат
$[a; b)$	– полуинтервал числовой прямой
$f([a; b])$	– множество значений функции f на отрезке [a; b]
$D(f)$	– область определения функции f (x)
$E(f)$	– множество значений функции f (x)

Δy – приращение, изменение y

$\lim f(n)$ – предел числовой функции f при n, стремящемся к ∞

$f'(x)$ – производная функции $f(x)$ (df/dx)

$\int$ – интеграл

$\longrightarrow$ – стремится

$\log_b a$ – логарифм числа a по основанию b

$\sqrt{a}$ – арифметический квадратный корень из числа a, $a \geq 0$

% – процент (сотая часть)

$|a|$ – модуль числа a (абсолютное значение)

$[a]$ – целая часть числа a

$\{a\}$ – дробная часть числа

$\uparrow\uparrow$ – сонаправленные векторы

$\uparrow\downarrow$ – противоположно направленные векторы

$n!$ – n-факториал $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1) \cdot n)$

НОД (m; n) – наибольший общий делитель чисел m и n

НОК (m; n) – наименьшее общее кратное чисел m и n

$\overline{abc}$ – десятичная запись числа $(\overline{abc} = 100a + 10b + c)$

const – константа, постоянная величина

$\angle$ – угол

$\llcorner$ – прямой угол

$\perp$ – перпендикулярность

– параллельность

ΔABC – треугольник с вершинами A, B, C

п/у Δ – прямоугольный треугольник

р/б Δ – равнобедренный треугольник

р/с Δ – равносторонний треугольник

$\smile$ – дуга окружности

$\sim$ – подобие

$^\circ$ – градус

$'$ – минута

$''$ – секунда

Константы (постоянные)

π – число Пи
(≈3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164...)

e – основание натурального логарифма
(≈2,7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369995...)